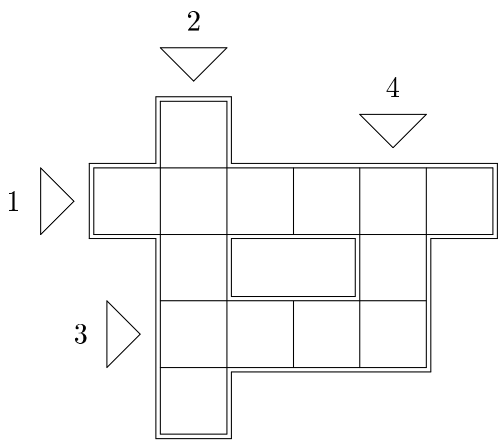
Kapitola 2

Dva príklady

Ilustráciou uvedeného typu problémov s ohraničeniami je doplňovačka[1], ktorej tvar je znázornený na obr. 2.1.



Obr. 2.1: Ilustračný problém s konečnými doménami.

Do tejto doplňovačky je potrebné doplniť štyri slová tak, aby všetky riadky a stĺpce boli úplne zaplnené. K dispozícii je nasledovný výber slov:

[1]Táto doplňovačka bude využívaná ako ilustračný príklad v značnej časti textu (buď v hore uvedenej podobe alebo s modifikovaným výberom slov).

6 písmen	:	žirafa, európa
5 písmen	:	puška, kurín
4 písmená	:	auto, íver
3 písmená	:	pór, eso

Táto úloha môže byť transformovaná na problém s ohraničeniami pomerne priamočiaro. Z formálneho hľadiska, jednotlivé riadky a stĺpce môžu byť reprezentované premennými (pre daný problém je teda potrebné použiť štyri premenné – ich indexy zodpovedajú označeniu riadkov a stĺpcov podľa obr. 2.1). Domény týchto premenných sú rovnaké – uvedených osem slov. Jedná sa teda o problém s konečnými doménami.

Keďže riadok č. 1 má dĺžku 6 znakov, je možné zmysluplne do neho umiestniť iba niektoré zo šesťpísmenových slov. Toto je možné vyjadriť ako unárne ohraničenie, definované nad premennou V_1, zodpovedajúcou prvému riadku. Toto ohraničenie bude povoľovať pre premennú V_1 iba dve rôzne hodnoty a bude mať teda tvar $C^1 = \{(\text{“žirafa”}), (\text{“európa”})\}$. Podobným spôsobom je možné definovať unárne ohraničenia pre všetky ostatné premenné.

Jednotlivé slová, umiestnené do doplňovačky, zdieľajú niektoré písmená. Tieto závislosti sa dajú vyjadriť ako viacárne ohraničenia. Napríklad fakt, že druhé písmeno slova v prvom riadku musí byť rovnaké ako druhé písmeno slova umiestneného v stĺpci č. 2, je možné reprezentovať binárnym ohraničením $C^{1,2}$ nad premennými V_1 a V_2. Toto ohraničenie bude povoľovať značný počet rôznych kombinácií a bude mať tvar {(“žirafa”,“žirafa”), . . . , (“eso”,“eso”), (“európa”,“puška”), . . . }.

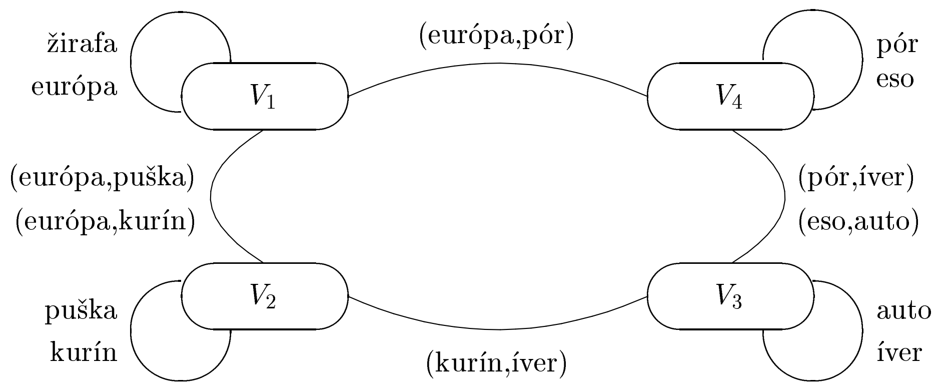
Celkovo pre daný problém je teda potrebné definovať štyri unárne a štyri binárne ohraničenia[2]. Priestor, ktorý je potrebné prehľadať, je konečný. Keďže každá doména obsahuje osem slov, tak tento priestor prehľadávania pozostáva z $8^4 = 4096$ štvoríc slov.

Použitím unárnych ohraničení je možné všetky domény redukovať na dvojprvkové množiny, čím sa získa priestor prehľadávania pozostávajúci zo šestnástich bodov. S ohľadom na to je možné sprísniť aj binárne ohraničenia, napr. keďže teraz v doméne D_1 sa nebude vyskytovať slovo “kurín”, tak $C^{1,2}$ nebude povoľovať napr. dvojicu (“kurín”,“auto”). Podobne aj keď ohraničenie $C^{1,2}$ v pôvodnej neredukovanej podobe pripúšťalo aj kombináciu

[2]Ostatné ohraničenia sú reprezentované implicitne – môžu byť indukované z explicitne vyjadrených ohraničení. Takým je napr. ohraničenie $C^{1,3}$ – z explicitne vyjadrených binárnych ohraničení vyplýva, že toto ohraničenie nepovoľuje napr. kombináciu hodnôt (“žirafa”, “íver”) pre premenné V_1 a V_3.

("žirafa","žirafa"), táto v prípade redukovaných domén nie je prípustná.

Uvedené ohraničenia po redukcii vytvárajú sieť ohraničení podľa obr. 2.2 (jednotlivé ohraničenia sú zadané explicitným vymenovaním povolených hodnôt resp. kombinácií hodnôt).



Obr. 2.2: Sieť ohraničení pre redukovaný ilustračný problém s konečnými doménami.

Ilustráciou problému s ohraničeniami, definovanými nad premennými s nekonečnými doménami, môže byť doplňovačka znázornená na obr. 2.3.

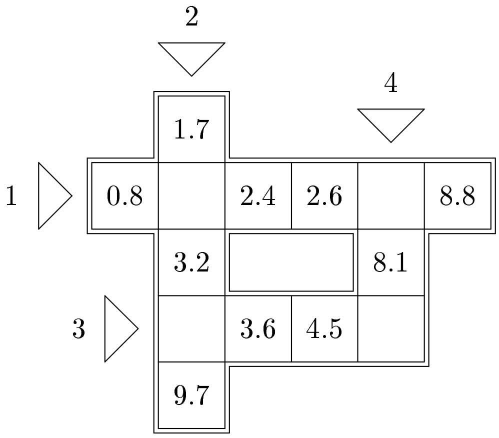
Do tejto doplňovačky je potrebné doplniť štyri kladné čísla tak, aby súčet čísiel v každom riadku a v každom stĺpci bol rovný číslu 20. Pritom musí byť zachované pravidlo, že jednotlivé čísla v políčkach sa zvyšujú v smere zľava doprava a taktiež v smere zhora nadol.

Opäť transformácia úlohy na problém s ohraničeniami (jeho formálne vyjadrenie) môže byť priamočiara. Jednotlivé voľné políčka môžu reprezentovať štyri premenné V_{12}, V_{23}, V_{34} a V_{14} (index premennej zodpovedá kompozícii indexov toho stĺpca a riadku, súčasťou ktorých je prázdne políčko reprezentované danou premennou). Domény týchto premenných budú reálne čísla.

Fakt, že doplniť je možné iba kladné čísla, môže byť reprezentovaný unárnym ohraničením rovnakým pre každú premennú. Naviac z podmienky "rastu" vyplývajú ďalšie unárne ohraničenia. Napr. unárne ohraničenie C^{12} prislúchajúce premennej V_{12} bude mať tvar:

$$C^{12} = \{0 < V_{12}, 0.8 \leq V_{12} \leq 2.4, 1.7 \leq V_{12} \leq 3.2\}$$

Napriek tejto redukcii jednotlivých domén priestor prehľadávania naďalej



Obr. 2.3: Ilustračný problém s nekonečnými doménami.

ostáva nekonečne veľkým.

Existujúce závislosti medzi premennými je možné reprezentovať binárnymi ohraničeniami[3]. Keďže pre každý stĺpec a každý riadok musí platiť podmienka "súčtu" čísel v riadku resp. stĺpci a súčasne aj podmienka "rastu" v zadanom smere, tak potom napr. ohraničenie $C^{12,14}$ bude mať tvar

$$\{V_{12} < V_{14}, 0.8 + V_{12} + 2.4 + 2.6 + V_{14} + 8.8 = 20\}.$$

Analogický tvar budú mať aj ďalšie ohraničenia $C^{12,23}$, $C^{14,34}$ a $C^{23,34}$. Celkovo je potrebné opäť definovať štyri unárne a štyri binárne ohraničenia. Výsledná sieť ohraničení má rovnakú štruktúru ako sieť na obr. 2.2, líši sa iba v označení premenných a v obsahu ohraničení. V tomto prípade jednotlivé ohraničenia nie sú dané explicitným vymenovaním povolených kombinácií hodnôt ale implicitne – predpisom, ktorý pre každú kombináciu hodnôt dovoľuje určiť, či táto kombinácia spĺňa dané ohraničenie alebo nie.

[3] Ak by úloha bola definovaná tak, že súčty čísel v jednotlivých riadkoch a stĺpcoch síce majú byť rovnaké, ale je jedno aká to bude hodnota, tak potom by bolo nutné definovať aj štyri ternárne ohraničenia (napr. $C^{14,23,34} = \{V_{23} + 3.6 + 4.5 + V_{34} = V_{14} + 8.1 + V_{34}\}$) a jedno 4-árne ohraničenie (obsahujúce napr. $1.7 + V_{12} + 3.2 + V_{23} + 9.7 = V_{14} + 8.1 + V_{34}$).