

Základy výrokovkej logiky

(Aplikácia logiky v inteligentných systémoch)

M. Mach

Katedra kybernetiky a umelej inteligencie, FEI, TUKE

september 2020

Výroková logika ako formálny systém

“nedostanem hlavnú cenu ani vedľajšiu”

Formálny systém: založený na formálnych logických výrokoch (výrazoch, vetách, formulách) a symboloch.

$$\neg C_H \wedge \neg C_V$$

Syntax: pravidlá pre vytváranie logických výrazov.

Sémantika: určovanie pravdivosti logických výrazov.

Ukotvenie: napojenie formálneho systému (symbolov) na reálny svet.

Syntax výrokového počtu

- Symboly P , $Cena$, KPI , C_V , X_{12} , $Z_{3,5,2}$, \top , \perp

- Pravidlá tvorby logických výrazov

$\langle \text{veta} \rangle$	$::=$	$\langle \text{atomická veta} \rangle$
		$ $
		$\langle \text{zložená veta} \rangle$
$\langle \text{atomická veta} \rangle$	$::=$	$\top \mid \perp \mid \langle \text{symbol} \rangle$
$\langle \text{zložená veta} \rangle$	$::=$	$\langle \text{unárny operátor} \rangle \langle \text{veta} \rangle$
		$ $
		$\langle \text{veta} \rangle \langle \text{binárny operátor} \rangle$
		$\langle \text{veta} \rangle$
		$ $
		$(\langle \text{veta} \rangle)$
$\langle \text{unárny operátor} \rangle$	$::=$	$\neg \mid \dots$
$\langle \text{binárny operátor} \rangle$	$::=$	$\vee \mid \wedge \mid \rightarrow \mid \leftrightarrow \mid \oplus \mid \uparrow \mid \downarrow \mid \dots$

Sémantika = Interpretácia výrazov

- Pravdivostné hodnoty TRUE a FALSE
- Interpretačné pravidlá
 - ak F je symbol, potom F' je dané interpretáciou I ,
 - ak $F = \perp$, tak $F' = \text{FALSE}$,
 - ak $F = \top$, tak $F' = \text{TRUE}$,
 - ak $F = (\odot G)$ a \odot reprezentuje jeden z definovaných unárnych operátorov, tak $F' = \odot(G')$,
 - ak $F = (G \odot H)$ a \odot reprezentuje jeden z definovaných binárnych operátorov, tak $F' = (G') \odot (H')$.
- Interpretácia symbolov $I = \{\dots\}$ definuje **svet**
- Interpretácia operátorov = **pravdivostné tabuľky**
- Parciálna interpretácia

Pravdivostné tabuľky operátorov

- 4 unárne operátory

X	$\neg X$
FALSE	TRUE
TRUE	FALSE

- 16 binárnych operátorov

X	Y	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \rightarrow Y$	$X \leftrightarrow Y$	$X \oplus Y$
FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE	FALSE
FALSE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE	FALSE	TRUE
TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE
TRUE	TRUE	TRUE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE

Príklad interpretácie

$$\begin{aligned}(P \wedge (\neg(Q \vee R)))' &= P' \wedge (\neg(Q \vee R))' \\ &= P' \wedge (\neg(Q \vee R))' \\ &= P' \wedge (\neg(Q' \vee R'))\end{aligned}$$

$$I = \{P'=\text{TRUE}, Q'=\text{FALSE}, R'=\text{TRUE}\}:$$

$$\begin{aligned}\text{TRUE} \wedge (\neg(\text{FALSE} \vee \text{TRUE})) &= \text{TRUE} \wedge (\neg\text{TRUE}) \\ &= \text{TRUE} \wedge \text{FALSE} = \text{FALSE}\end{aligned}$$

$$I = \{P'=\text{TRUE}, Q'=\text{TRUE}\}: \text{TRUE}$$

$$I = \{P'=\text{TRUE}, Q'=\text{FALSE}\}: R'$$

Interpretácia pravdivostnou tabuľkou

- Príklad: $P \wedge (\neg(Q \vee R))$

P	Q	R	$Q \vee R$	$\neg(Q \vee R)$	$P \wedge (\neg(Q \vee R))$
FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	FALSE
FALSE	FALSE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE
FALSE	TRUE	FALSE	TRUE	FALSE	FALSE
FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE
TRUE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE
TRUE	FALSE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE
TRUE	TRUE	FALSE	TRUE	FALSE	FALSE
TRUE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE

- Štruktúra tabuľky
 - riadky - svety, počet
 - stĺpce - počet, prvé vs stredné vs posledný

Vlastnosti operátorov

- *priorita/precedencia* $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ a \oplus :
 $P \wedge \neg Q \vee R = (P \wedge (\neg Q)) \vee R$
- *asociativita* je sprava doľava: $P \vee Q \vee R = P \vee (Q \vee R)$
- *komutatívnosť* (nezáleží na poradí vstupov): $P \odot Q = Q \odot P$
- *asociatívnosť* (združovanie): $P \odot (Q \odot R) = (P \odot Q) \odot R$
- *idempotencia* (zloženie argumentu s ním samým): $P \odot P = P$
- *zachovanie pravdivosti* (ak oba vstupy sú \top tak aj výstup je \top): $\top \odot \top = \top$
- *zachovanie nepravdivosti* (ak oba vstupy sú \perp tak aj výstup je \perp): $\perp \odot \perp = \perp$

Vlastnosti vybraných binárných operátorov

	\wedge	\vee	\rightarrow	\leftrightarrow	\oplus
<i>komutatívnosť</i>	áno	áno	nie	áno	áno
<i>asociatívnosť</i>	áno	áno	nie	áno	áno
<i>idempotencia</i>	áno	áno	nie	nie	nie
<i>zachovanie pravdivosti</i>	áno	áno	áno	áno	nie
<i>zachovanie nepravdivosti</i>	áno	áno	nie	nie	áno

Splniteľnosť, validnosť a falzifikovateľnosť

- svet = interpretácia symbolov vety
 - model je svet, v ktorom je veta pravdivá
- typy viet
 - splniteľná veta – existuje aspoň jeden model
 - nesplniteľná veta – model neexistuje
 - validná veta (tautológia) – všetky svety sú modelmi
 - falzifikovateľná veta – aspoň jeden svet nie je modelom
- vzťahy medzi typmi viet
 - F je validná $\leftrightarrow \neg F$ je nesplniteľná
 - splniteľnosť a nesplniteľnosť sa navzájom vylučujú
 - validnosť a falzifikovateľnosť sa navzájom vylučujú
 - nesplniteľnosť zahŕňa falzifikovateľnosť
 - validnosť zahŕňa splniteľnosť

Ekvivalentnosť výrazov

- logická ekvivalentnosť (\equiv)
 - v zmysle svetov, modelov a pravdivostných tabuliek
- náhrada operátorov
 - $P \leftrightarrow Q : (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
 - $P \rightarrow Q : \neg P \vee Q$
 - $P \oplus Q : (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$ alebo $\neg(P \rightarrow Q) \vee \neg(Q \rightarrow P)$
- Minimálna množina operátorov
 $\{\neg, \vee\}, \{\neg, \wedge\}, \{\neg, \rightarrow\}$

Vybrané příklady ekvivalentnosti

Typ ekvivalencie	Příklady ekvivalencie
<i>zjednodušení</i>	$P \vee P \equiv P \quad P \wedge P \equiv P$ $P \rightarrow P \equiv \top \quad P \leftrightarrow P \equiv \top$ $P \oplus P \equiv \perp$
<i>absorpcia symbolu</i>	$P \vee \perp \equiv P \quad P \wedge \top \equiv P \quad P \oplus \top \equiv \neg P$ $P \vee \top \equiv \top \quad P \wedge \perp \equiv \perp \quad P \oplus \perp \equiv P$ $P \rightarrow \top \equiv \top \quad \perp \rightarrow P \equiv \top \quad P \leftrightarrow \perp \equiv \neg P$ $P \rightarrow \perp \equiv \neg P \quad \top \rightarrow P \equiv P \quad P \leftrightarrow \top \equiv P$
<i>transpozícia</i>	$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$
<i>AND eliminácia</i>	$P \wedge Q \equiv P, Q$
<i>absorpcia</i>	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P \quad P \wedge (\neg P \vee Q) \equiv P \wedge Q$ $P \vee (P \wedge Q) \equiv P \quad P \vee (\neg P \wedge Q) \equiv P \vee Q$
<i>distributívnosť</i>	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
<i>De Morganove pravidlá</i>	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$ $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

Ukotvenie v realite

Príklad:

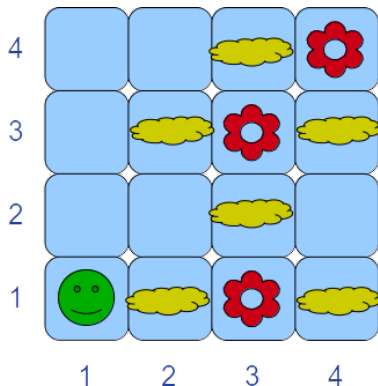
“Stano hovorí, že podvádza Fero alebo Ondro”

- ukotvenie symbolov
 - výber granularity
- eliminácia viaczmyselnosti jazyka
 - “návšteva reštaurácie alebo kina” (\vee vs \oplus)
 - “ak sa nenaučím, tak neurobím skúšku” (\rightarrow vs \leftrightarrow)
- tvrdenia o tvrdeniach (\leftrightarrow)

Príklad (pokrač.):

$$S \leftrightarrow F \vee O$$

Simulované prostredie



Poloha agenta



Priepasť = po vstupe agent hynie



Prievan = aspoň v jednej zo susedných (nie diagonálne) miestností je priepasť

Znalostná báza pre simulované prostredie

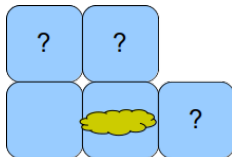
$$R_1: \neg P_{11}$$

$$R_2: B_{11} \leftrightarrow (P_{12} \vee P_{21})$$

$$R_3: B_{21} \leftrightarrow (P_{11} \vee P_{22} \vee P_{31})$$

$$R_4: \neg B_{11}$$

$$R_5: B_{21}$$



$$KB = R_1 \wedge R_2 \wedge R_3 \wedge R_4 \wedge R_5$$

Logické vyplývanie

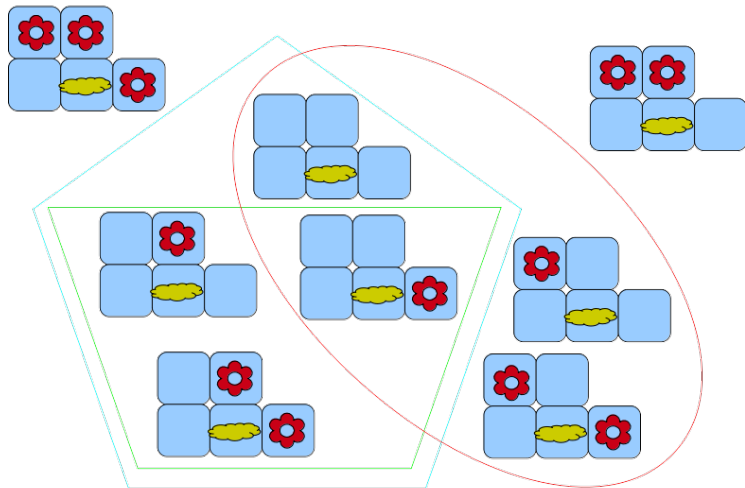
$$P \models Q$$

- Q vyplýva z P (z predpokladu P vyplýva záver Q)
- v tých svetoch, v ktorých je P pravdivé (obmedzenie uvažovaných svetov), je pravdivé aj Q
 - naopak to platiť nemusí

$$(A \wedge B) \models (A \vee B)$$

- $\models Q$ platí iba ak Q je tautológiou (predpoklad neurobil žiadne obmedzenie na uvažované svety)
- $(P \wedge \neg P) \models Q$ platí pre ľubovoľné Q (predpoklad eliminoval všetky svety)
 - v prípade výskytu sporu možno odvodiť čokoľvek

Zahrnutie - agent na (2,1)



Rezolvenčné odvodzovanie

- Špeciálny prípad vyplývania – predpokladom je konjunkcia dvoch disjunktívnych klauzúl s *komplementárnymi* literálmi

$$\frac{\neg P \vee Q \quad \neg Q \vee R}{\neg P \vee R}$$

- Rezolvenčné odvodzovacie pravidlo $C = C_1 \otimes C_2$
 - C_1 a C_2 - ľubovoľný (aj navzájom rôzny) počet literálov
 - C je rezolventa
 - môže byť viac možných rezolvent
 - počet literálov rezolventy $|C| = |C_1| + |C_2| - 2$
- Zachováva splniteľnosť

Sémantika a jednotková rezolvenca

- $P \models Q$ je vlastne $P \rightarrow Q$
- Rezolvenčné odvodzovacie pravidlo vyjadruje tranzitívnosť implikácie

$$\frac{\neg P \vee Q \quad \neg Q \vee R}{\neg P \vee R} \equiv \frac{P \rightarrow Q \quad Q \rightarrow R}{P \rightarrow R}$$

- Jednotková rezolvenca
 - skracovanie dĺžky vstupnej klauzuly

$$\text{Modus ponens} \\ \frac{P \quad P \rightarrow R}{R}$$

$$\text{Modus tolens} \\ \frac{\neg R \quad P \rightarrow R}{\neg P}$$