

Splniteľné modulové teórie

(Aplikácia logiky v inteligentných systémoch)

M. Mach

Katedra kybernetiky a umelej inteligencie, FEI, TUKE

október 2020

Chýbajúca väzba medzi symbolmi

Získanie vodičského preukazu:

$skuska \wedge \neg vek_pod_17 \wedge (vek_pod_18 \rightarrow spolujazdec)$

- 4 symboly znamenajú 16 možných interpretácií
 - pri inferencii sa uvažujú všetky možné interpretácie
 - interpretácia symbolov nie je ovplyvnená tým, čo vlastne symboly reprezentujú
 - niektoré interpretácie nemajú zmysel

$$I = \{vek_pod_17' = TRUE, vek_pod_18' = FALSE\}$$

- Väzba medzi hodnotami symbolov musí byť daná explicitne logickým výrazom (ale ostáva 16 svetov)

$$vek_pod_17 \rightarrow vek_pod_18$$

Symbody s “vnútornou štruktúrou”

- Symbody VL nemajú žiadnu vnútornú štruktúru, ktorá by znázornila väzbu medzi nimi
- Použitie štruktúry:

$skuska \wedge \neg(vek < 17) \wedge ((vek < 18) \rightarrow spolujazdec)$

- *skuska* a *spolujazdec* ostávajú logickými symbolmi
- Výrazy $(vek < 17)$ a $(vek < 18)$
 - hrajú úlohu symbolov (možu byť interpretované ako pravdivé alebo nepravdivé)
 - ich interpretácia nie je ľubovoľná
 - označujú sa ako *atómy*

Interpretácia atómov

- Interpretácia atómu ($vek < 17$) závisí na
 - hodnote numerickej premennej vek
 - interpretácii znaku $<$
- Výroková logika bola doplnená *teóriou* \mathcal{T}
 - *background* teória alebo *modulová* teória
- Modulová teória \mathcal{T} poskytuje
 - stavebné bloky pre tvorbu atómov
 - možnosti kombinovania stavebných blokov
 - spôsob ako interpretovať tieto stavebné bloky
- Interpretácia atómov ako ne/pravdivých je vždy daná vzhľadom na použitú teóriu \mathcal{T}

Obohatená syntax

$\langle \text{veta} \rangle$	$::=$	$\langle \text{atomická veta} \rangle$
		$ $
		$\langle \text{zložená veta} \rangle$
$\langle \text{atomická veta} \rangle$	$::=$	$\top \mid \perp \mid \langle \text{symbol} \rangle \mid \langle \text{atóm} \rangle$
$\langle \text{zložená veta} \rangle$	$::=$	$\langle \text{unárny operátor} \rangle \langle \text{veta} \rangle$
		$ $
		$\langle \text{veta} \rangle \langle \text{binárny operátor} \rangle$
		$ $
		$\langle \text{veta} \rangle$
		$ $
		$(\langle \text{veta} \rangle)$
$\langle \text{symbol} \rangle$	$::=$	identifikátor
$\langle \text{unárny operátor} \rangle$	$::=$	$\neg \mid \dots$
$\langle \text{binárny operátor} \rangle$	$::=$	$\vee \mid \wedge \mid \rightarrow \mid \leftrightarrow \mid \oplus \mid \uparrow \mid \downarrow \mid \dots$

- Syntax atómu (má svoju vnútornú štruktúru) je daná použitou teóriou \mathcal{T}

Splniteľnosť

- Splniteľnosť - hľadá sa interpretácia symbolov a atómov, pri ktorej je celá veta interpretovaná ako pravdivá \rightarrow výrokový model vety
- \mathcal{T} -splniteľnosť - splniteľnosť vzhľadom na použitú modulovú teóriu \mathcal{T}
 - fixuje interpretáciu stavebných blokov, z ktorých sú vytvorené atómy

$$skuska \wedge \neg(vek < 17) \wedge \neg(vek < 18)$$

- hľadanie interpretácie v podmienkach štandardného usporiadania nad celými číslami

Výber modulovej teórie

- Reprezentácia úlohy rozhoduje o tom, aká modulová teória \mathcal{T} má byť použitá
- Najčastejšie používané teórie
 - teória rovnosti s neinterpretovanými funkciami,
 - lineárna aritmetika,
 - aritmetika bitových vektorov,
 - logika polí,
 - smerníková logika.

alebo ich ohraničené podmnožiny

Lineárna aritmetika

- Atómy majú tvar ohraničení jedného z tvarov $a_1X_1 + \dots + a_nX_n = b$ $a_1X_1 + \dots + a_nX_n \bowtie b$
 - \bowtie reprezentuje niektorý z operátorov nerovnosti ($<$, \leq , $>$, \geq)
 - a_i ($i = 1, \dots, n$) a b reprezentujú číselné konštanty
- Je možné reprezentovať aj prípady iného tvaru
 - $a_1X_1 \dots a_nX_n < c_1Y_1 \dots c_mY_m$ pridaním nulovej konštanty $a_1X_1 \dots a_nX_n - c_1Y_1 \dots - c_mY_m < 0$,
 - $a_1X_1 \dots a_nX_n + b_1 < c_1X_1 \dots c_nX_n + b_2$ zoskupením konštant $(a_1 - c_1)X_1 \dots (a_n - c_n)X_n < b_2 - b_1$.
- Negácia (komplement)
 - ostrej/neostrej nerovnosti je opačná neostrá/ostrá nerovnosť
 - rovnosti je konjunkcia dvoch ostrých nerovností

Rozdielová (separačná) logika

- Fragment lineárnej aritmetiky obmedzujúci
 - počet premenných (2 premenné)
 - tvar koeficientov a_1 a a_2 (jeden $+1$ a druhý -1)
 - relačný operátor (iba nerovnosti $<$, \leq , $>$, \geq)
- Atóm má tvar rozdielu premenných $X - Y \bowtie c$
- Je možné reprezentovať aj prípady iného tvaru
 - $X - Y = c$ ako konjunkciu $(X - Y \leq c) \wedge (X - Y \geq c)$,
 - $X < Y$ pomocou pridania nulovej konštanty $X - Y < 0$,
 - $X < c$ ako $X - Z_0 < c$ s pridaním špeciálnej premennej Z_0 , ktorej hodnota musí byť vždy 0.
- Pre negáciu platí $\neg(X - Y \bowtie c) = X - Y(\neg \bowtie)c$
- Premenné môžu byť celočíselné alebo reálne

Hľadanie modelu

- Hľadá sa taký výrokový model vety, ktorý je súčasne aj \mathcal{T} -splniteľný
- Teória = úprava inferenčných metód aby zohľadňovali iba interpretácie konzistentné s použitou teóriou \mathcal{T}
 - pridanie axióm teórie \mathcal{T} je možné iba pre niektoré teórie
- Prax = metódy špecializované na konkrétne modulové teórie
- Dva základné prístupy pre určenie splniteľnosti (podľa toho kedy sa zohľadňuje \mathcal{T})
 - včasná kontrola
 - neskorá kontrola