Základy predikátovej logiky
(Aplikácia logiky v inteligentných systémoch)

M. Mach

Katedra kybernetiky a umelej inteligencie, FEI, TUKE

november 2020

Reprezentácia objektov, stavov a vlastností

v Poprade prší, v Košiciach slnko, v Prešove zamračené

- Výroková logika
  - symbol pre každú kombináciu
  - veľký počet symbolov
- Predikátová logika
  - prirodzený spôsob reprezentácie
    - **dazd(poprad)** – dážď je vlastnosť Popradu
    - **poprad(dazd)** – kde sa vyskytuje daný stav
    - **pocasie(poprad,dazd)** – vzťah medzi stavom a miestom
  - prirodzený spôsob reprezentácie objektov, vlastností a vzťahov medzi objektami

Predikátový počet 0. rádu

$$
\begin{array}{rcl}
<\text{veta}> & ::= & <\text{predikát}> \mid <\text{zložená veta}> \\
<\text{zložená veta}> & ::= & <\text{unárny operátor}> <\text{veta}> \\
 & \mid & <\text{veta}> <\text{binárny operátor}> \\
 & & <\text{veta}> \\
 & \mid & (<\text{veta}>) \\
<\text{unárny operátor}> & ::= & \neg \mid \ldots \\
<\text{binárny operátor}> & ::= & \vee \mid \wedge \mid \rightarrow \mid \leftrightarrow \mid \oplus \mid \uparrow \mid \downarrow \mid \ldots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
<\text{predikát}> & ::= & <\text{predikátový symbol}>(<\text{term}>*) \\
<\text{term}> & ::= & <\text{funkcia}> \mid <\text{konštanta}> \\
<\text{funkcia}> & ::= & <\text{funkčný symbol}>(<\text{term}>+)
\end{array}
$$

- Predikát v PL hrá úlohu symbolu vo VL
- Predikát je “symbol s vnútornou štruktúrou”

Predikáty a ich štruktúra

- Predikát pozostáva z
  - názov - predikátový symbol
  - argumenty (ich počet je árnosť)
    - **pocasie(poprad,prsi)**, **prsi(poprad)**, **prsi**, **prsi(stanica(poprad))**
- Argument (term)
  - konštanta reprezentuje objekt bez zohľadnenia štruktúry
  - funkcia reprezentuje
    - objekt so štruktúrou – **vozidlo(typ(prives),napravy(3))**
    - objekty odvodené z iných objektov – **letisko(poprad)**, **otec(otec(jano))**
  - konštanta je funkcia s nulovou árnosťou
- Predikáty a termy syntakticky vyzerajú rovnako
  - **letisko(poprad)** – funkcia alebo predikát ?

Interpretácia voči doméne

Výroková logika	*Predikátová logika*	*Doména*
symboly	konštanty	objekty
	funkčné symboly	funkcie
	predikátové symboly	relácie

- Doména obsahuje
  - m_o objektov, m_f^i funkcií árnosti i, m_r^i relácií árnosti i
  - funkcia je zobrazenie z $\mathcal{D}^n$ do $\mathcal{D}$, kde $\mathcal{D}$ označuje objekty domény a n árnosť funkcie
  - relácia je zobrazenie z $\mathcal{D}^n$ do množiny $\{TRUE, FALSE\}$ a n označuje árnosť relácie
- Interpretácia sa vždy realizuje voči nejakej doméne

Interpretácia predikátov a termov

- Konštanta reprezentuje objekt domény
  - nie každý objekt musí byť reprezentovaný
  - objekt môže byť reprezentovaný viacerými konštantami
- Funkcia
  - funkčný symbol reprezentuje funkciu domény
  - $f(t_1, \ldots, t_n)^I = f^I(t_1^I, \ldots, t_n^I)$
  - celá funkcia referuje na objekt z domény
- Predikát
  - predikátový symbol reprezentuje reláciu domény
  - $p(t_1, \ldots, t_n)^I = p^I(t_1^I, \ldots, t_n^I)$
  - predikát je pravdivý v nejakej interpretácii vtedy, ak tá relácia domény, na ktorú odkazuje predikátový symbol v interpretácii, platí medzi tými objektami domény, na ktoré odkazujú argumenty predikátu v danej interpretácii

Interpretácia viet

- Interpretácia viet
  - ak F je konštanta, funkcia alebo predikát, potom F^I je dané interpretáciou I,
  - ak $F = (\odot G)$ a $\odot$ reprezentuje jeden z definovaných unárnych operátorov, tak $F^I = \odot(G^I)$,
  - ak $F = (G \odot H)$ a $\odot$ reprezentuje jeden z definovaných binárnych operátorov, tak $F^I = (G^I) \odot (H^I)$.
- Interpretácie sa líšia v tom, ako interpretujú konštanty a symboly voči prvkom domény
  - počet možných interpretácií $(m_o)^{n_k} \left(\prod_{i=1,\dots}(m_f^i)^{n_f^i}\right) \left(\prod_{i=1,\dots}(m_r^i)^{n_p^i}\right)$
- Možné svety sú definované ako kombinácia interpretácie a domény
  - počet možných svetov neohraničený

Predikátový počet 1. rádu

- Predikátový počet 0. rádu umožňuje reprezentovať iba jednotlivé špecifické objekty
- Zavedenie premenných

$$
\begin{aligned}
<\text{zložená veta}> \quad ::= &\quad \ldots \\
\mid &\quad <\text{kvantifikátor}> \\
&\quad <\text{premenná}> <\text{veta}> \\
<\text{term}> \quad ::= &\quad \ldots \mid <\text{premenná}> \\
<\text{kvantifikátor}> \quad ::= &\quad \exists \mid \forall
\end{aligned}
$$

- Premenné majú rovnakú úlohu ako konštanty a funkcie
  - reprezentujú prvky nejakej množiny objektov

Kvantifikátory

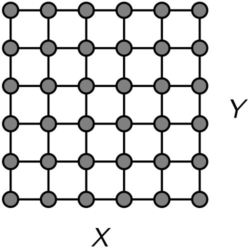
- Univerzálny kvantifikátor ($\forall$)
  - umožňuje vytvárať všeobecnejšie tvrdenia
  - $\forall X\ (clovek(X) \rightarrow \forall Y\ (zviera(Y) \rightarrow ma\_rad(X, Y)))$
  - veta tvaru "$\forall X < veta >$" je univerzálne kvantifikovaná
- Existenčný kvantifikátor ($\exists$)
  - umožňuje tvrdenia o niektorých objektoch
  - $\exists X\ (clovek(X) \wedge \exists Y\ (zviera(Y) \wedge \neg ma\_rad(X, Y)))$
  - veta tvaru "$\exists X < veta >$" je existenčne kvantifikovaná
- Kvantifikátory môžu byť kombinované
  - $\forall X\ (clovek(X) \rightarrow \exists Y, Z\ (zviera(Y) \wedge zviera(Z) \wedge ma\_rad(X, Y) \wedge \neg ma\_rad(X, Z)))$

Vlastnosti kvantifikátorov (1)

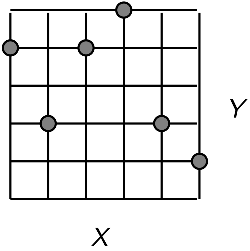
- Dualita kvantifikátorov
  - kvantifikátory sú navzájom zameniteľné
    $\forall X\ p(X)\ \equiv\ \neg(\exists X\ \neg p(X))$
    $\exists X\ p(X)\ \equiv\ \neg(\forall X\ \neg p(X))$
- Negácia kvantifikátorov
  - jeden typ kvantifikátora sa mení na druhý typ
    $\neg(\forall X\ p(X))\ \equiv\ \exists X\ \neg p(X)$
    $\neg(\exists X\ p(X))\ \equiv\ \forall X\ \neg p(X)$

Kombinovanie kvantifikátorov

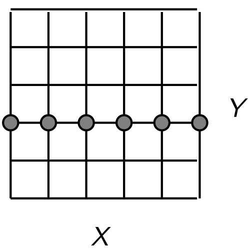
$\forall X \forall Y \; p(X,Y)$

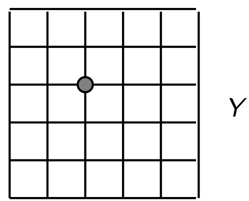


$\forall X \exists Y \; p(X,Y)$

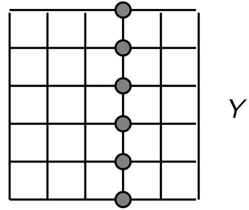


$\exists Y \forall X \; p(X,Y)$

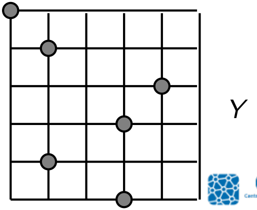




$\exists X \exists Y \; p(X,Y)$



$\exists X \forall Y \; p(X,Y)$



$\forall Y \exists X \; p(X,Y)$

Vlastnosti kvantifikátorov (2)

- Komutatívnosť kvantifikátorov
  - kvantifikátory toho istého typu sú komutatívne
    $\forall X \, \forall Y \; p(X, Y) \; \equiv \; \forall Y \, \forall X \; p(X, Y)$
    $\exists X \, \exists Y \; p(X, Y) \; \equiv \; \exists Y \, \exists X \; p(X, Y)$
  - pri rôznych typoch jednosmerný vzťah
    $\exists X \, \forall Y \; p(X, Y) \; \models \; \forall Y \, \exists X \; p(X, Y)$
- Distributívnosť kvantifikátorov
    $\forall X \; (p(X) \wedge q(X)) \; \equiv \; \forall X \; p(X) \wedge \forall X \; q(X)$
    $\exists X \; (p(X) \vee q(X)) \; \equiv \; \exists X \; p(X) \vee \exists X \; q(X)$
  - $\forall$ nie je distributívny nad disjunkciou
    $\forall X \; p(X) \vee \forall X \; q(X) \; \models \; \forall X \; (p(X) \vee q(X))$
  - $\exists$ nie je distributívny nad konjunkciou
    $\exists X \; (p(X) \wedge q(X)) \; \models \; \exists X \; p(X) \wedge \exists X \; q(X)$

Viazané a voľné premenné

- Ak je premenná kvantifikovaná, tak je *viazaná*
- Ak premenná nie je kvantifikovaná, tak je *voľná*
  - voľná premenná môže byť nahradené inou voľnou premennou
- Premenná môže v rôznych častiach vety hrať rôznu úlohu

$$\forall X\ (p(X, Y, Z) \rightarrow \exists Y\ q(X, Y, Z))$$
$$\forall X\ p(X, Y, Z) \rightarrow \exists Y\ q(X, Y, Z)$$

- Jedno meno môže patriť viacerým premenným

$$\forall X\ (p(X, Y, Z) \rightarrow \exists X\ q(X, Y, Z))$$

- Ak sa vo vete vyskytujú iba viazané premenné, tak veta je *uzavretá*
  - interpretovať vieme iba viazané premenné

Interpretácia premennej

- Pre viazané premenné sa vytvárajú *rozšírené* interpretácie
  - v každej rozšírenej interpretácii je premenná interpretovaná ako jeden z objektov, na ktoré premenná odkazuje
- Všeobecne kvantifikovaná veta je pravdivá v interpretácii I, ak je pravdivá pre všetky rozšírené interpretácie odvodené z I,
- Existenčne kvantifikovaná veta je pravdivá v interpretácii I, ak je pravdivá pre aspoň jednu rozšírenú interpretáciu odvodenú z I.
- Vieme interpretovať iba uzavreté vety!