Rezolučné odvodzovanie v predikátovej logike

(Aplikácia logiky v inteligentných systémoch)

M. Mach

Katedra kybernetiky a umelej inteligencie, FEI, TUKE

november 2020

Konjunktívna normálna forma v PL

$$
\begin{aligned}
<\text{veta}> &::= <\text{klauzula}> \mid <\text{klauzula}> \wedge <\text{veta}> \\
<\text{klauzula}> &::= <\text{literál}> \mid <\text{literál}> \vee <\text{klauzula}> \\
<\text{literál}> &::= <\text{predikát}> \mid \neg <\text{predikát}>
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
<\text{predikát}> &::= <\text{predikátový symbol}>(<\text{term}>^*) \\
<\text{term}> &::= <\text{konštanta}> \\
&\mid <\text{funkcia}> \\
&\mid <\text{premenná}> \\
<\text{funkcia}> &::= <\text{funkčný symbol}>(<\text{term}>+)
\end{aligned}
$$

- Opäť konjunkcia klauzúl v tvare disjunkcií literálov
- Premenné a ich kvantifikátory
  - niektoré premenné ostávajú (termy predikátov a funkcií) a niektoré boli nahradené
  - oba kvantifikátory boli odstránené

Transformácia do CNF

- Transformácia na *inferenčne ekvivalentnú* vetu

vstup: veta F v ľubovoľnom tvare
výstup: veta F v CNF tvare

1. $F :=$ *eliminácia_ekvivalencií(F)*
2. $F :=$ *eliminácia_implikácií(F)*
3. $F :=$ *vnorenie_negácií(F)*
4. $F :=$ štandardizácia_premenných(F)
5. $F :=$ vylúčenie_existenčných_kvantifikátorov(F)
6. $F :=$ vylúčenie_zovšeobecňovacích_kvantifikátorov(F)
7. $F :=$ *úprava_na_CNF(F)*

Štandardizácia premenných

- Cieľom je zabezpečiť, aby žiadne dve premenné neboli pomenované rovnako
- Iba viazané premenné, žiadna premenná nie je voľná
  - každá premenná je kvantifikovaná
  - počet premenných rovný počtu kvantifikátorov
  - každej premennej zodpovedá jeden kvantifikátor
- $\forall X\ p(X) \vee \exists X\ q(X)$ – disjunktné pôsobnosti
  - meno v rámci pôsobnosti rôznych kvantifikátorov označuje rôzne premenné
- $\forall X\ (p(X) \rightarrow \exists X\ q(X))$ – vnorené pôsobnosti
  - premenná patrí k najbližšiemu kvantifikátoru zľava
- Vety líšiace sa iba menami premenných sú ekvivalentné $\rightarrow$ premenovanie premenných

Vylúčenie ∃ kvantifikátora – skolemizácia

- $\exists X \quad < veta >$
  - teda existuje objekt, pre ktorý je veta pravdivá ...
  - namiesto premennej použijeme priamo daný objekt ...
  - a keďže nevieme, ktorý objekt to má byť, dáme mu novú prezývku ...
  - ... to, komu bude patriť prezývka, určí až interpretácia
- Skolemova konštanta = bezkontextová náhrada

  $\exists X\ p(X)$ sa zamení za $p(prezyvka)$
- Skolemova funkcia = kontextové pomenovanie

  $\forall Y \exists X\ p(X)$ prejde na $p(prezyvka(Y))$

  $\forall Z \forall Y \exists X\ p(X)$ prejde na $p(prezyvka(Z, Y))$
  - kontextom je oblasť pôsobnosti ∀ kvantifikátorov
  - v rôznych kontextoch adresujeme rôzne objekty

Vylúčenie $\forall$ kvantifikátora

- Vylúčenie sa deje v dvoch krokoch
  - presun kvantifikátorov na začiatok vety (použitím pravidiel pre rozšírenie pôsobnosti kvantifikátorov)

$$
\begin{array}{rcl}
\forall X\ p(X, \ldots) \vee q(\ldots) & \rightarrow & \forall X\ (p(X, \ldots) \vee q(\ldots)) \\
q(\ldots) \vee \forall X\ p(X, \ldots) & \rightarrow & \forall X\ (q(\ldots) \vee p(X, \ldots)) \\
\forall X\ p(X, \ldots) \wedge q(\ldots) & \rightarrow & \forall X\ (p(X, \ldots) \wedge q(\ldots)) \\
q(\ldots) \wedge \forall X\ p(X, \ldots) & \rightarrow & \forall X\ (q(\ldots) \wedge p(X, \ldots))
\end{array}
$$

  - vypustenie kvantifikátorov
- stačí si pamätať, že všetky premenné, ktoré vo vete ostali, sú všeobecne kvantifikované

Rezolvencia v predikátovej logike

- Aj v tomto prípade je možné použiť rezolvenčné odvodzovacie pravidlo nepriamym spôsobom (pre hľadanie sporu)
- Odlišnosť voči rezolvencii vo výrokovej logike
  - symboly boli nahradené predikátmi s vnútornou štruktúrou
  - predikáty môžu obsahovať premenné, ktoré zastupujú objekty
- Problémom je určenie komplementárnej dvojice literálov (predikátov)
  - použitie iba predikátových symbolov bez termov
  - použitie termov (konštánt, funkcií)
  - použitie premenných

Unifikácia

- Substitúcia termov za premenné
  - znižovanie počtu uvažovaných interpretácií (iba jedna rozšírená interpretácia)
  - keďže premenné sú univerzálne kvantifikované, tak nepravdivosť v jednej rozšírenej interpretácii znamená celkovú nepravdivosť
- Cieľom unifikácie je hľadať takú substitúciu, aby dve vety boli ekvivalentné
  - hľadá sa taký unifikátor θ
    $\mathit{unify}(P, Q) = \theta$
  - ktorý umožní dosiahnuť rovnakú podobu oboch viet pri substitúcii týmto unifikátorom
    $\mathit{subst}(\theta, P) = \mathit{subst}(\theta, Q)$

Unifikátor θ

- Unifikátor je množina substitúcií
  - pre každdú premennú najviac jedna náhrada
- Pre unifikáciu dvoch viet môže existovať viac rôznych unifikátorov
  - unifikátory sa líšia svojou všeobecnosťou
  - hľadá sa najvšeobecnejší unifikátor (ktorý najmenej obmedzuje hodnoty premenných)
- Prípady, keď unifikácia nie je možná
  - konštanta ani funkcia nemôžu byť nahradené premennou (nie je prípustná substitúcia p/X ani $f(p)/X$)
  - premenná nemôže byť nahradená termom, obsahujúcim vo svojej štruktúre danú premennú (nie je prípustná substitúcia $X/f(X)$)

Unifikačný algoritmus (1)

vstup: predikáty x a y
výstup: unifikátor θ v prípade úspechu alebo $\oslash$ pri neúspechu

---

unify(x, y)
1. $\theta := \{\}$
2. **return** *unify_aux*(x, y, θ)

unify_var(var, x, θ)
1. **if** $var/y \in \theta$ **then return** *unify_aux*(y, x, θ)
2. **else if** $x/y \in \theta$ **then return** *unify_aux*(var, y, θ)
3. **else if** $var \in x$ **then return** $\oslash$
4. **else return** $\theta = \theta \cup \{var/x\}$

Unifikačný algoritmus (2)

$unify\_aux(x, y, \theta)$

if $\theta = \oslash$ **then return** $\oslash$
else if $x = y$ **then return** θ
else if $var?(x)$ **then return** $unify\_var(x, y, \theta)$
else if $var?(y)$ **then return** $unify\_var(y, x, \theta)$
else if $x = a(p, ..., r)$ **and** $y = b(s, ..., u)$ **then return**
$\quad unify\_aux([p, ..., r], [s, ..., u], unify\_aux(a, b, \theta))$
else if $x = [p, q, ..., r]$ **and** $y = [s, t, ..., u]$ **then return**
$\quad unify\_aux([q, ..., r], [t, ..., u], unify\_aux(p, s, \theta))$
else return $\oslash$

Zovšeobecnená rezolvencia

- Ak pri hľadaní komplementarity predikátov bol použitý unifikátor, tak ten sa musí prejaviť aj vo výsledku rezolvencie
- Rezolvenčné odvodzovacie pravidlo bude mať všeobecnejší tvar

$$\frac{P \vee Q \qquad \neg R \vee S}{subst(\theta, P \vee S\ )}$$

kde unifikátor $\theta = unify(Q, R)$ je taký, že pre neho platí

$$subst(\theta, Q) = subst(\theta, R)$$

Poznámky k zovšeobecnenej rezolvencii

- Redundantný výskyt literálu v rezolvente
  - použiť unifikáciu na redundantnú dvojicu predikátov
  - nahradiť oba predikáty ich unifikovanou podobou
  - aplikovať unifikátor na celú rezolventu
- Kolízia premenných
  - prípad, keď v oboch vstupných klauzulách sa vyskytuje premenná rovnakého mena
  - keďže premenné sú univerzálne kvantifikované, tak platí $\forall X\ (p(X) \wedge g(X)) \equiv \forall X\ \forall Y\ (p(X) \wedge g(Y))$
  - potrebné premenovať premennú v jednej z klauzúl
  - možno ako dodatočný krok transformácie vety na CNF

$$\begin{array}{ll} \ldots & \\ 7. & F := \textit{úprava\_na\_CNF}(F) \\ 8. & F := \textit{jednoznačnosť\_mien\_premennych}(F) \end{array}$$

Derivačný graf

$\neg susedne(S, Q) \vee \neg priepast(Q) \vee prievan(S)$ $\quad$ $priepast(pole(1,2))$

$\{Q/pole(1,2)\}$

$\neg susedne(S, pole(1,2)) \vee prievan(S)$ $\quad$ $\neg prievan(pole(1,1))$

$\{S/pole(1,1)\}$

$\neg susedne(pole(1,1), pole(1,2))$

$\{A/1, B/1, C/2\}$ $\quad$ $\neg po(B, C) \vee susedne(pole(A,B), pole(A,C))$

$\neg po(1,2)$ $\quad$ $po(1,2)$

$\emptyset$

Zodpovedanie otázok

- Ak je Jano stále tam, kde je Paľo a ten je v škole, kde je Jano?

  $\forall X\ (v(palo, X) \rightarrow v(jano, X))$
  $v(palo, skola)$